Small K-タイプに付随したRiemann対称空間上のベクトル束における球変換 (表現論とその周辺分野の広がり)

織田, 寛; 示野, 信一

数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 79-97

Small K-タイプに付随した Riemann 対称空間上のベクトル束における球変換

拓殖大学 工学部　織田 寛
Hiroshi Oda
Faculty of Engineering, Takushoku University
関西学院大学 理工学部　示野 信一
Nobukazu Shimeno
School of Science & Technology, Kwansei Gakuin University

Abstract

For a connected semisimple real Lie group G of non-compact type, Wallach introduced a class of K-types called *small*. We classify all small K-types for all simple Lie groups and prove except just one case that each *elementary spherical function* for each small K-type (π, V) can be expressed as a product of hyperbolic cosines and a *Heckman-Opdam hypergeometric function*. As an application, the inversion formula for the spherical transform on $G \times_K V$ is obtained from Opdam's theory on *hypergeometric Fourier transforms*.

1 基本球関数

G を有限な中心を持つ連結な実半単純 Lie 群とし，$G = KAN$ をその岩澤分解とする．通常通り，各 Lie 群に対する Lie 環をドイツ文字で表す．G 上の両側 K-不変な C^∞ 級関数は**球関数**と呼ばれ，その中でも特に，$1_G \in G$ で 1 の値を取り，G/K 上の不変微分作用素環 $\boldsymbol{D}$ の同時固有関数になっているものは，**基本球関数**と呼ばれる．これら基本球関数により定まる**球変換**が本質的に $L^2(G/K)$ の既約分解を与えることはよく知られている（[HC, Hel] 参照）．

(π, V) を任意の K-タイプ（K の既約ユニタリ表現）とし，ベクトル束 $G \times_K V$ の解析において同様の議論をしようとすると，(π, V) に対する球関数を考える必要があるが，その理論（[Go, War, GV]）はあまり簡単ではない．しかし，$G \times_K V$ の切断に作用する不変微分作用素の環 $\boldsymbol{D}^\pi$ が可換な場合は，以下に見るように定義等が簡単になる（[C] 参照）．以下，$\boldsymbol{D}^\pi$ は可換であるとする．[De, Theorem 3] により，この条件は V が M（K における $\mathfrak{a}$ の中心化群）の表現として重複度自由に分解することと同値である．

定義 1.1　G 上定義された $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$-値の C^∞ 関数 ϕ で，

$$\phi(k_1 g k_2) = \pi(k_2^{-1})\phi(g)\pi(k_1^{-1}) \quad \forall g \in G, \quad \forall k_1, k_2 \in K \tag{1.1}$$

を満たすものを **π-球関数**という．π-球関数全体を $C^\infty(G,\pi,\pi)$ と表す．さらに，1_G で id_V の値を取り，$\boldsymbol{D}^\pi$ の同時固有関数になっているような π-球関数を**基本 π-球関数**という．（自然な同一視 $C^\infty(G,\pi,\pi) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, C^\infty(G\times_K V))$ により，$\boldsymbol{D}^\pi$ は $C^\infty(G,\pi,\pi)$ に作用する．）

実は，このように $\boldsymbol{D}^\pi$ が可換である場合でも基本 π-球関数の具体的性質を調べるのは難しい．本稿では，最も易しいと思われる (π, V) が small ***K*-タイプ**である場合を扱う．

定義 1.2 ([Wal, §11.3]) K-タイプ (π, V) は，M の表現として既約であるとき，small であるという．

以下 (π, V) は small であるとするが，small の場合は自明な K-タイプの場合 ($G\times_K V = G/K$ の場合) に成り立っていたことの多くが殆どそのまま拡張される．まず，次の定理は Harish-Chandra **同型**の一般化である．W を制限ルート系 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の Weyl 群，$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ を $\mathfrak{a}$ の複素化 $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の対称代数，$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の普遍包絡環とする．

定理 1.3 (1) $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K$ ($U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の K-不変元全体) から $\boldsymbol{D}^\pi$ への自然な $\mathbb{C}$-代数の準同型により，

$$0 \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K \cap U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\,\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{k}_\mathbb{C})}\,\pi^* \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K \to \boldsymbol{D}^\pi \to 0$$

が完全となる．ここで，(π^*, V^*) は (π, V) の反傾表現とする．（これは small に限らず任意の K-タイプ (π, V) に対して正しい．）
(2) 分解 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \simeq U(\mathfrak{n}_\mathbb{C}) \otimes U(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \otimes U(\mathfrak{k}_\mathbb{C})$ を用いて次の線形写像を定める：

$$\begin{aligned}\gamma^\pi : U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \simeq 1\otimes U(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes U(\mathfrak{k}_\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}_\mathbb{C} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) &\xrightarrow{\text{射影}} 1\otimes U(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes U(\mathfrak{k}_\mathbb{C}) \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes U(\mathfrak{k}_\mathbb{C}) \\ &\xrightarrow{(f(\lambda)\mapsto f(\lambda+\rho))\otimes\pi^*} S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes \mathrm{End}_\mathbb{C} V^*.\end{aligned}$$

ここで $\rho := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_\mathfrak{n}(\cdot) \in \mathfrak{a}^*$ とする．$D \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^M$ のとき，$\gamma^\pi(D) \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes \mathrm{End}_M V^*$ であり，Schur の補題より $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes\mathrm{End}_M V^* \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes\mathbb{C} \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ なので，$\gamma^\pi(D) \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ と見做す．すると，γ^π の $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K$ への制限は $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ への $\mathbb{C}$-代数の準同型となり，

$$0 \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K \cap U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\,\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{k}_\mathbb{C})}\,\pi^* \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K \xrightarrow{\gamma^\pi} S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W \to 0$$

が完全となる．
(3) 以上より次の $\mathbb{C}$-代数の同型が導かれる：

$$\gamma^\pi : \boldsymbol{D}^\pi \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W.$$

注意 1.4 (1) は [De] 参照．(2) は [Wal, §11.3.3] による．

(3) より，$\boldsymbol{D}^\pi$ から $\mathbb{C}$ への準同型が各 $\lambda \in {}_W\backslash\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* = \mathrm{Specm}\,S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ に対して定まるが，このような準同型（あるいは λ）と基本 π-球関数は，以下のように 1 対 1 に対応する．

定理 1.5　任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して，

$$\phi_\lambda^\pi(1_G) = \mathrm{id}_V, \qquad D\,\phi_\lambda^\pi = \gamma^\pi(D)(\lambda)\,\phi_\lambda^\pi \quad (\forall D \in \boldsymbol{D}^\pi) \tag{1.2}$$

を満たす $\phi_\lambda^\pi \in C^\infty(G,\pi,\pi)$ が一意的に存在する．さらに，積分公式

$$\phi_\lambda^\pi(g) = \int_K e^{(\lambda-\rho)(H(gk))}\,\pi(k\kappa(gk)^{-1})\,dk \tag{1.3}$$

が成り立ち，ϕ_λ^π は G 上で実解析的である．但し，dk は K 上の規格化された Haar 測度で，$x \in G$ に対して，$\kappa(x) \in K$，$H(x) \in \mathfrak{a}$ は $x \in \kappa(x)e^{H(x)}N$ により定まるものとする．

$\phi \in C^\infty(G,\pi,\pi)$ とする．ϕ の A への制限 $\phi|_A$ は，(1.1) より $\mathrm{End}_M V$ に値を取るが，Schur の補題により $\mathrm{End}_M V \simeq \mathbb{C}$ なので，$\mathbb{C}$-値関数と見做せる．$\phi|_A$ と $\exp : \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} A$ との合成を $\Upsilon^\pi(\phi) \in C^\infty(\mathfrak{a})$ と書こう．次の Chevalley **制限定理**も容易に示される：

定理 1.6　制限写像 Υ^π は $C^\infty(G,\pi,\pi)$ から $C^\infty(\mathfrak{a})^W$ への同型写像である．

この同型を通じて，条件 (1.2) を $\mathfrak{a}$ 上で考えることができる．$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} = \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \alpha(H) \neq 0\ (\forall \alpha \in \Sigma)\}$，$\Sigma^+$ を N に対応する正ルート系とし，$\mathscr{R}$ を $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ 上の実解析関数 $(1 \pm e^{\alpha})^{-1}$ $(\alpha \in \Sigma^+)$ で生成される単位的 $\mathbb{C}$-代数とする．$\mathscr{R}$ は W の自然な作用で閉じていて，$\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の各元は $\mathscr{R}$ を係数とする $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ 上の偏微分作用素と見做すことができる．また，$\mathscr{R}$ の各元 a は $\mathfrak{a}_- := \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \alpha(H) < 0\ (\forall \alpha \in \Sigma^+)\}$ 上絶対収束する級数 $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma^+} a_\mu e^\mu$ に展開される．$\mathscr{M}$ を $a_0 = 0$ であるような a 全体からなる $\mathscr{R}$ の極大イデアルとする．

命題 1.7　各 $D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$ に対して，

$$\Upsilon^\pi(D\,\phi)|_{\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}} = \Delta^\pi(D)\,\Upsilon^\pi(\phi)|_{\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}} \qquad (\forall \phi \in C^\infty(G,\pi,\pi))$$

となる $\Delta^\pi(D) \in (\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^W$ が一意的に存在する（D の**動径成分**と呼ぶ）．この $\Delta^\pi(D)$ は，適当な $a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{M}$ と $E_1, \ldots, E_k \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ により

$$\Delta^\pi(D) = \gamma^\pi(D)(\cdot - \rho) + \sum_{j=1}^k a_j\,E_j. \tag{1.4}$$

という形に書ける．$\Delta^\pi : U(\mathfrak{g})^K \to (\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^W$ は $U(\mathfrak{g})^K \to \boldsymbol{D}^\pi$ を factor through するような $\mathbb{C}$-代数の準同型である．

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とすると，定理 1.5，定理 1.6，命題 1.7 により，$f \in C^\infty(\mathfrak{a})^W$ で

(ES1)　$\Delta^\pi(D)\,f = \gamma^\pi(D)(\lambda)\,f \qquad (\forall D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K)$,

(ES2)　$f(0) = 1$

を満たすものが $f = \Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda)$ であることが分かる．実は，殆どの場合に (ES1) が，Heckman と Opdam による**超幾何微分方程式系**（[HO]）を捻ったものに一致することを後で示すのだが，その準備として $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の Casimir 元 $\Omega_\mathfrak{g}$ の動径成分 $\Delta^\pi(\Omega_\mathfrak{g})$ を計算しておく．

制限ルート $\alpha \in \Sigma$ に対するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とし，その次元を $\boldsymbol{m}_\alpha$ とする．一般に，ルート系上定義された Weyl 群不変な関数は**重複度関数**と呼ばれるが，$\boldsymbol{m} : \Sigma \ni \alpha \mapsto \boldsymbol{m}_\alpha$ がその起源である．θ を Cartan 対合とする．

命題 1.8 $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = -\alpha^\vee$（$\alpha$ のコルート）となるように規格化したルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha = \frac{1}{\dim V}\operatorname{Tr}(\pi(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2)$$

と置くと，この値は X_α の取り方に依らない．さらに，$\boldsymbol{\kappa}^\pi : \Sigma \ni \alpha \mapsto \boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha$ は重複度関数になる．

重複度関数 $\boldsymbol{\kappa}^\pi$ は本稿で必要な small K-タイプ (π, V) の情報をすべてエンコードしている．$B(\cdot,\cdot)$ を Killing 形式とする．$\Omega_\mathfrak{a}$，$\Omega_\mathfrak{m}$ を $B(\cdot,\cdot)$ を使って定めた $U(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$，$U(\mathfrak{m}_\mathbb{C})$ の Casimir 元とする．$\pi(\Omega_\mathfrak{m}) \in \operatorname{End}_M V$ はスカラー作用素なので，そのスカラー値を ϖ^π と置く．また，各 $\alpha \in \Sigma$ に対して $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ を $\alpha(\cdot) = B(H_\alpha, \cdot)$ となるように定める．

定理 1.9 $\Delta^\pi(\Omega_\mathfrak{g} - \varpi^\pi) = \Omega_\mathfrak{a} + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \boldsymbol{m}_\alpha\left(\coth\alpha\, H_\alpha - \frac{\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha \|\alpha\|^2}{4\cosh^2\frac{\alpha}{2}}\right).$

2 Heckman-Opdam 超幾何関数

本節では Heckman-Opdam **超幾何関数**の復習をする（詳しくは [HO, Hec, Op2] を参照）．§1 で我々は自明な K-タイプに対する古典的な基本球関数の理論を small K-タイプの場合へ一般化したが，Heckman-Opdam 超幾何関数は古典的な基本球関数を別方向へ一般化するものである．つまり，(π, V) を自明な K-タイプとするとき，基本球関数の $\mathfrak{a}$ への制限に対する微分方程式系 (ES1) は，ルート系 Σ と重複度関数 $\boldsymbol{m}$ だけから再構成できるのだが，$\boldsymbol{m}$ を任意の複素数値の重複度関数にした方程式系も同様に構成することができる（超幾何微分方程式系）．その解のうち，W-不変であり，(ES2) を満たすものが Heckman-Opdam 超幾何関数である．$\dim\mathfrak{a} = 1$ のときこの関数は Gauss の超幾何関数で表されるが，基本球関数の拡張という視点から，[HO] より先んじて Flensted-Jensen と Koornwinder により Jacobi **関数**として研究されていた（[Ko] 参照）．

本節では §1 における G や (π, V) に対する設定を一旦忘れて，$\mathfrak{a}$ は内積 $B(\cdot,\cdot)$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする．$B(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ 上の双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ を誘導する．Σ' を（整数性条件を満たす）$\mathfrak{a}^*$ 内のルート系とし，W' をその Weyl 群とする．ルート系の定義から，Σ' は $\mathfrak{a}^*$ を張ることに注意する．$\Sigma'^+ \subset \Sigma'$ を適当な正ルート系とし，$\mathscr{R}'$ を $(1 - e^\alpha)^{-1}$

$(\alpha \in \Sigma'^{+})$ で生成される単位的 $\mathbb{C}$-代数とする．

$\mathcal{K}(\Sigma')$ を Σ' 上の複素数値重複度関数全体の空間とする．これは，Σ' の W' 軌道の数を次元とする複素ベクトル空間である．任意の $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}(\Sigma')$ に対して，$(\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W'}$ に属する 2 階の微分作用素

$$L(\Sigma', \boldsymbol{k}) = \Omega_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha \in \Sigma'^{+}} \boldsymbol{k}_\alpha \coth \frac{\alpha}{2} H_\alpha \tag{2.1}$$

を定める．ここで，$\Omega_\alpha \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ や $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ $(\alpha \in \Sigma')$ は §1 と同様である．また，$\rho(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma'^{+}} \boldsymbol{k}_\alpha \alpha$ とし，

$$\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k}) = \prod_{\alpha \in \Sigma'^{+}} \left| \frac{\sinh(\alpha/2)}{||\alpha/2||} \right|^{2\boldsymbol{k}_\alpha} \tag{2.2}$$

と置く．$D \mapsto \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} \circ D \circ \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}}$ は $(\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W'}$ の自己同型である．

命題 2.1 ([HO, Proposition 2.2])

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} \circ (L(\Sigma', \boldsymbol{k}) + (\rho(\boldsymbol{k}), \rho(\boldsymbol{k}))) \circ \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}} \\ = \Omega_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha \in \Sigma'^{+}} \frac{\boldsymbol{k}_\alpha(1 - \boldsymbol{k}_\alpha - 2\boldsymbol{k}_{2\alpha})||\alpha||^2}{4\sinh^2 \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで，$\alpha \notin \Sigma'$ のときは $\boldsymbol{k}_\alpha = 0$ とする．

$\mathscr{R}'$ の各元 a は $\mathfrak{a}_{-} := \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \alpha(H) < 0 \ (\forall \alpha \in \Sigma'^{+})\}$ 上絶対収束する級数 $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma'^{+}} a_\mu e^\mu$ に展開される．$\mathscr{M}'$ を $a_0 = 0$ であるような a 全体からなる $\mathscr{R}'$ の極大イデアルとする．すると，$\mathscr{M}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ も微分作用素環 $\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ のイデアルになるので，

$$\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})} : \mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) = S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \oplus \mathscr{M}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\text{射影}} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{f(\lambda) \mapsto f(\lambda + \rho(\boldsymbol{k}))} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \tag{2.4}$$

は $\mathbb{C}$-代数の準同型になる．

命題 2.2 ([Hec, Theorem 1.3.12]) $\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}$ を部分代数

$$(\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W', L(\Sigma', \boldsymbol{k})} := \left\{ D \in (\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W'} \;\middle|\; [L(\Sigma', \boldsymbol{k}), D] = 0 \right\}$$

に制限したものは，$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W'}$ の上への同型を与える．特に，$(\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W', L(\Sigma', \boldsymbol{k})}$ に属する微分作用素はすべて互いに可換である．

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とし，$f \in \mathscr{A}(\mathfrak{a})^{W'}$（$\mathfrak{a}$ 上の W' 不変な実解析関数の空間）に対する 2 条件

(HG1) $\quad Df = \gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}(D)(\lambda) f \quad (\forall D \in (\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W', L(\Sigma', \boldsymbol{k})})$,

(HG2) $\quad f(0) = 1$

を考えよう ((HG1) が超幾何微分方程式系). まず, $L(\Sigma',\boldsymbol{k})$ や $(\mathscr{R}'\otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W',L(\Sigma',\boldsymbol{k})}$ の各元に対する $\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}$ の値は Σ'^{+} の選び方に依らないことが容易に確認できるので, (HG1) も Σ'^{+} の選び方に依らない. $\mathcal{K}(\Sigma')\times\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ 上の有理型関数

$$\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)=\prod_{\alpha\in\Sigma'_{+}}\frac{\Gamma(\lambda(\alpha^{\vee})+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_{\frac{1}{2}\alpha})}{\Gamma(\lambda(\alpha^{\vee})+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_{\frac{1}{2}\alpha}+\boldsymbol{k}_{\alpha})} \tag{2.5}$$

を定めると, 次がいえる.

定理 2.3 $\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\rho(\boldsymbol{k}))$ は $\mathcal{K}(\Sigma')$ 全体で正則な関数である. また, $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}(\Sigma')$ に関する以下の条件はすべて同値である：

(1) $\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\rho(\boldsymbol{k}))\neq 0$.

(2) 任意の $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して, (HG1) および条件 $f(0)=0$ を満たす $f\in\mathscr{A}(\mathfrak{a})^{W'}$ は定数関数 0 だけである.

(3) 任意の $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して, (HG1) と (HG2) を満たす $f\in\mathscr{A}(\mathfrak{a})^{W'}$ が存在する.

$\mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')=\{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}(\Sigma')\,|\,\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\rho(\boldsymbol{k}))\neq 0\}$ と置くと, 定理により任意の $(\boldsymbol{k},\lambda)\in\mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')\times\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して, (HG1) と (HG2) を満たす $f\in\mathscr{A}(\mathfrak{a})^{W'}$ が一意的に存在する. この f を $F(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)$ と書き, Heckman-Opdam 超幾何関数 (または**ルート系 Σ' に付随した超幾何関数**) と呼ぶ.

$F(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)$ は (HG1) を満たす級数から次のようにして構成される. まず, generic な $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ と任意の $\boldsymbol{k}$ に対して

$$\Phi(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)=e^{\lambda-\rho(\boldsymbol{k})}+\sum_{\mu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Sigma'^{+}\setminus\{0\}}a_{\mu}e^{\lambda-\rho(\boldsymbol{k})-\mu}\quad(a_{\mu}=a_{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)\in\mathbb{C})$$

という形をした (HG1) の級数解が一意的に定まる (実際には $D=L(\Sigma',\boldsymbol{k})$ の場合の方程式のみで決まってしまう). この級数は $\mathfrak{a}_{+}:=-\mathfrak{a}_{-}$ 上絶対収束して実解析的になる. 次に,

$$c(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda):=\frac{\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)}{\tilde{c}(\Sigma',\boldsymbol{k},\rho(\boldsymbol{k}))} \tag{2.6}$$

と置き, $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')$ とすると, generic な $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ と任意の $H\in\mathfrak{a}_{+}$ に対して

$$F(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda;H)=\sum_{w\in W}c(\Sigma',\boldsymbol{k},w\lambda)\Phi(\Sigma',\boldsymbol{k},w\lambda;H) \tag{2.7}$$

が成り立つ. つまり, $F(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda)$ は (2.7) の右辺を $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}\times\mathfrak{a}=\{(\lambda,H)\}$ 全体に解析的に延長したものに他ならない. 以上より直ちに次を得る.

命題 2.4 $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')$, $H\in\mathfrak{a}_{+}$ とすると, $(\operatorname{Re}\lambda,\alpha)>0$ $(\forall\alpha\in\Sigma')$ を満たす generic な $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}e^{t(-\lambda+\rho(\boldsymbol{k}))(H)}F(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda;tH)=c(\Sigma',\boldsymbol{k},\lambda).$$

3 方程式系の一致

再び §1 の設定に戻り，G は実半単純 Lie 群，(π, V) は small K-タイプとする．まず，

$$\tilde{\delta}_{G/K} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \left|\frac{\sinh\alpha}{||\alpha||}\right|^{\boldsymbol{m}_\alpha} \tag{3.1}$$

と置くと，これはルート系 $\Sigma' = 2\Sigma$ とその上の重複度関数 $\boldsymbol{k} : 2\Sigma \ni 2\alpha \mapsto \frac{\boldsymbol{m}_\alpha}{2}$ に対する $\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})$ なので，定理 1.9 と命題 2.1 から

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}_{G/K} \circ (\Delta^\pi(\Omega_{\mathfrak{g}} - \varpi^\pi) + ||\rho||^2) \circ \tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}}_{G/K} \\ = \Omega_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{\boldsymbol{m}_\alpha||\alpha||^2}{4}\left(\frac{-\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha}{\sinh^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2 - \boldsymbol{m}_\alpha - 2\boldsymbol{m}_{2\alpha} + 4\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha}{\sinh^2\alpha}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

が得られる．改めて $\mathfrak{a}^*$ 内のルート系 Σ' とその上の重複度関数 $\boldsymbol{k}$ は一般であるとし，(2.3) の右辺と (3.2) の右辺を比較する．すると，$\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ 上の関数たち $\frac{1}{\sinh^2(\alpha/2)}$ $(\alpha \in \Sigma \cup 2\Sigma)$ は 1 次独立であるから，

$$\Sigma' \subset \Sigma \cup 2\Sigma \tag{3.3}$$

の仮定のもと，

$$-\boldsymbol{m}_\alpha\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{m}_{\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{m}_{\frac{\alpha}{2}} - \boldsymbol{m}_\alpha + 2\boldsymbol{\kappa}^\pi_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \boldsymbol{k}_\alpha(1 - \boldsymbol{k}_\alpha - 2\boldsymbol{k}_{2\alpha}) \quad (\forall\alpha \in \Sigma\cup 2\Sigma) \tag{3.4}$$

が，(2.3) の右辺と (3.2) の右辺が一致するための必要十分条件であることが分かる．従って，(3.3), (3.4) のもとに

$$\begin{aligned}L(\Sigma', \boldsymbol{k}) + (\rho(\boldsymbol{k}), \rho(\boldsymbol{k})) \\ = \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}_{G/K} \circ (\Delta^\pi(\Omega_{\mathfrak{g}} - \varpi^\pi) + ||\rho||^2) \circ \tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}}_{G/K}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.5}$$

が成り立つ．このとき，基本 π-球関数の $\mathfrak{a}$ への制限 $\Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda)$ に対する微分方程式系 (ES1) は $\tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}}_{G/K}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}$ で捻ると，超幾何関数 $F(\Sigma', \boldsymbol{k}, \lambda)$ に対する微分方程式系 (HG1) に一致することが期待されるが，これが実際に

$$W = W' \tag{3.6}$$

という条件を追加すれば正しいことを以下に見ていく．

(3.3), (3.4), (3.6) を仮定する．§2 の $\mathbb{C}$-代数 $\mathscr{R}'$ は §1 の $\mathscr{R}$ の部分代数である（前者は $(1 - e^\alpha)^{-1}$ $(\alpha \in \Sigma')$ で生成され，後者は $(1 \pm e^\alpha)^{-1}$ $(\alpha \in \Sigma)$ で生成される）．

$\Sigma'^{+} := \Sigma' \cap (\Sigma^{+} \cup 2\Sigma^{+})$ とすると，$\mathscr{M}' = \mathscr{M} \cap \mathscr{R}'$ であり，(2.4) で定めた準同型 $\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}$ を $\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \to S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ に延長できる．(1.4) より任意の $D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{K}$ に対して

$$\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}\Big(\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}_{G/K}^{\frac{1}{2}} \circ \Delta^{\pi}(D) \circ \tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}\Big) = \gamma_{\rho}(\Delta^{\pi}(D)) = \gamma^{\pi}(D) \tag{3.7}$$

である．さらに，$\Delta^{\pi}(D)$ は $\Delta^{\pi}(\Omega_{\mathfrak{g}} - \varpi^{\pi}) + ||\rho||^{2}$ と可換であるので，(3.5) より

$$\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}_{G/K}^{\frac{1}{2}} \circ \Delta^{\pi}(D) \circ \tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} \in (\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W, L(\Sigma', \boldsymbol{k})}$$

となる．一方，命題 2.2 は $\mathscr{R}'$ を $\mathscr{R}$ にしても成立することが示され，

$$(\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W, L(\Sigma', \boldsymbol{k})} = (\mathscr{R} \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W, L(\Sigma', \boldsymbol{k})} \xrightarrow[\gamma_{\rho(\boldsymbol{k})}]{\sim} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W}$$

が分かる．これと，定理 1.3，(3.7) を合わせると

$$\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}_{G/K}^{\frac{1}{2}} \circ \Delta^{\pi}\big(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{K}\big) \circ \tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} = (\mathscr{R}' \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))^{W, L(\Sigma', \boldsymbol{k})} \tag{3.8}$$

が得られる．(3.7) と (3.8) は，各 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して，(ES1) を $\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}$ で捻ったものが (HG1) であることを示している．

さて，関数 $\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}$ が $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ で特異性を持ちうることに注意しよう．

補題 3.1　$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{A}(\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$ が $\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}} \cup \{0\}$ を含む開集合上の実解析関数に延長されるためには，

$$\frac{\boldsymbol{m}_{\alpha} + \boldsymbol{m}_{2\alpha}}{2} = \boldsymbol{k}_{\alpha} + \boldsymbol{k}_{2\alpha} + \boldsymbol{k}_{4\alpha}. \qquad (\forall \alpha \in \Sigma \setminus 2\Sigma) \tag{3.9}$$

が必要十分である．このとき

$$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \Sigma^{+} \setminus 2\Sigma^{+}} \left(\cosh \frac{\alpha}{2}\right)^{-\boldsymbol{k}_{\alpha}} (\cosh \alpha)^{\boldsymbol{k}_{4\alpha} - \frac{\boldsymbol{m}_{2\alpha}}{2}} \tag{3.10}$$

であり，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}$ は原点で 1 の値を取る $\mathfrak{a}$ 上の実解析関数に延長される．

定理 3.2　Σ' と $\boldsymbol{k}$ が (3.3), (3.4), (3.9) を満たすとき，$\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')$ となり次が成り立つ：

$$\Upsilon^{\pi}(\phi_{\lambda}^{\pi}) = \tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{\frac{1}{2}}\, F(\Sigma', \boldsymbol{k}, \lambda) \qquad (\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}). \tag{3.11}$$

証明　(3.3), (3.9) のもとに (3.6) がいえるので上の議論が使えて，各 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$ に対して $\tilde{\delta}(\Sigma', \boldsymbol{k})^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}_{G/K}^{\frac{1}{2}}\, \Upsilon^{\pi}(\phi_{\lambda}^{\pi}) \in \mathscr{A}(\mathfrak{a})^{W}$ が (HG1), (HG2) を満たす．よって定理 2.3 (3)⇒(1) より $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathrm{reg}}(\Sigma')$ となり，超幾何関数の定義から (3.11) を得る．　□

次節では，すべての非コンパクト実単純 Lie 群 G の各 small K-タイプ (π, V) に対して (3.3), (3.4), (3.9) を満たす $\Sigma' = \Sigma^\pi$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^\pi$ を与える（存在しない例外が 1 つある）．3 つの条件はこのままでは使いにくいが，実は $\boldsymbol{\kappa}^\pi$ には

$$\boldsymbol{m}_\alpha \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha = 0$$

という性質があり，これにより 3 条件を簡単にすることができる．

命題 3.3　$\Sigma' = \Sigma^\pi$ は (3.3) を満たすとする．このとき，Σ^π 上の重複度関数 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^\pi$ が (3.4), (3.9) を満たすことは，以下と同値である：

(1) $\boldsymbol{m}_{2\alpha} = 0$ であるすべての $\alpha \in \Sigma \setminus 2\Sigma$ に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}^\pi_\alpha = \dfrac{\boldsymbol{m}_\alpha - 1 \pm \sqrt{(\boldsymbol{m}_\alpha - 1)^2 - 4\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha}}{2}, \\ \boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = \dfrac{1 \mp \sqrt{(\boldsymbol{m}_\alpha - 1)^2 - 4\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha}}{2}, \end{cases}$$

(2) $\boldsymbol{m}_{2\alpha} > 0$ であるすべての $\alpha \in \Sigma \setminus 2\Sigma$ に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}^\pi_\alpha = 0, \\ \boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{m}_\alpha + \boldsymbol{m}_{2\alpha} - 1 \pm \sqrt{(\boldsymbol{m}_{2\alpha} - 1)^2 - 4\boldsymbol{m}_{2\alpha} \boldsymbol{\kappa}^\pi_{2\alpha}}}{2}, \\ \boldsymbol{k}^\pi_{4\alpha} = \dfrac{1 \mp \sqrt{(\boldsymbol{m}_{2\alpha} - 1)^2 - 4\boldsymbol{m}_{2\alpha} \boldsymbol{\kappa}^\pi_{2\alpha}}}{2}, \end{cases}$$

または

$$\boldsymbol{\kappa}^\pi_{2\alpha} = \frac{1}{4}\boldsymbol{m}_{2\alpha} - \frac{1}{2} \quad \text{のもとに} \quad \begin{cases} \boldsymbol{k}^\pi_\alpha = \boldsymbol{m}_\alpha + \boldsymbol{m}_{2\alpha} - 1, \\ \boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = 1 - \dfrac{\boldsymbol{m}_\alpha + \boldsymbol{m}_{2\alpha}}{2}, \\ \boldsymbol{k}^\pi_{4\alpha} = 0. \end{cases}$$

4　主結果と small K-タイプの分類

定理 4.1　G を有限な中心を持つ非コンパクト実単純 Lie 群，(π, V) をその small K-タイプとする．さらに，G が G_2 型の単連結スプリット実単純 Lie 群 $\tilde{G}_2$ の場合は，π は定理 4.3 で定める K-タイプ π_2 ではないとする．このとき，$\mathfrak{a}^*$ 内のルート系 Σ^π とその上の重複度関数 $\boldsymbol{k}^\pi$ が存在して次が成り立つ：

$$\Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda) = \tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}}\, F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda) \qquad (\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}). \tag{4.1}$$

この定理は，すべての G に対して small K-タイプを分類し，各 small K-タイプ (π, V) に対して $\boldsymbol{\kappa}^\pi$ を計算し，命題 3.3 の条件を満たす Σ^π と $\boldsymbol{k}^\pi$ を具体的に与えることにより示

される．(G がスプリット型のときの (π, V) の分類と $\boldsymbol{\kappa}^\pi$ の計算の本質的な部分は，[L] による.）

以降，small K-タイプの分類結果と各 (π, V) に対する Σ^π, $\boldsymbol{k}^\pi$ の具体例をリストしていく．一方，$\boldsymbol{\kappa}^\pi$ の値は一部を除いて掲載しない（詳細は [OS] を参照）．一般に，G の small K-タイプは被覆群に持ち上げても small なので，分類は各非コンパクト型実単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して行われる．

4.1 自明な K-タイプ

任意の G に対して，自明な K-タイプ (π, V) は small である．この場合 $\boldsymbol{\kappa}^\pi \equiv 0$ なので，$\Sigma^\pi = 2\Sigma$ と $\boldsymbol{k}^\pi : \Sigma^\pi \ni 2\alpha \mapsto \frac{m_\alpha}{2}$ が命題 3.3 の条件を満たす．実際，こうすると $\Delta^\pi(\Omega_\mathfrak{g}) = L(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)$, $\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = 1$ となり，(ES1) は (HG1) と完全に一致し，$\Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda) = F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda)$ となる．

以下では基本的に非自明な small K-タイプのみを扱う．

4.2 非自明な small K-タイプを持たない単純 Lie 群

次の場合は，small K-タイプは自明なものしかない．

- G は複素単純 Lie 群,
- $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(p, \mathbf{H})$ $(p \geq 2)$,
- $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sp}(p, q)$ $(p \geq q \geq 2)$,
- $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{so}(2r+1, 1)$ $(r \geq 1)$,
- $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}_{6(-26)}$ (E IV),
- $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{f}_{4(-20)}$ (F II).

G が複素単純 Lie 群で (π, V) が自明な K-タイプのとき，(4.1) を満たす Σ^π と $\boldsymbol{k}^\pi$ の組み合わせは無限にある（$\Sigma^\pi \subset \Sigma \cup 2\Sigma$ を仮定していない）．

4.3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p, 1)$ $(p \geq 1)$

$G = \mathrm{Sp}(p, 1)$ $(p \geq 1)$, $K = \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(1)$ とすると，G は単連結である．$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ をそれぞれ K から $\mathrm{Sp}(p)$, $\mathrm{Sp}(1)$ への射影とする．$(\pi_n, \mathbb{C}^n)$ を $\mathrm{Sp}(1) \simeq \mathrm{SU}(2)$ の次元 $n = 1, 2, \ldots$ の既約表現とすると，$\pi_n \circ \mathrm{pr}_2$ は small K-タイプである．$p = 1$ のときは $\pi_n \circ \mathrm{pr}_1$ も同様．その他に G の small K-タイプはない．$p = 1$ のとき $\Sigma = \{\pm 2\alpha\}$, $p \geq 2$ のとき $\Sigma = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ とする．$\pi = \pi_n \circ \mathrm{pr}_2$ に対しては，$\Sigma^\pi = \{\pm 2\alpha, \pm 4\alpha\}$, $\boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = 2p - 1 \pm n$, $\boldsymbol{k}^\pi_{4\alpha} = \frac{1}{2} \mp n$ とすると (4.1) が成り立ち，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = (\cosh\alpha)^{-1 \mp n}$ となる．$p = 1$

のときの $\pi = \pi_n \circ \mathrm{pr}_1$ も同様である．この結果は，[T], [S2], [DP] により既に知られている．

4.4 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r, 1)$ $(r \geq 2)$

$G = \mathrm{Spin}(2r, 1)$ $(r \geq 2)$, $K = \mathrm{Spin}(2r)$ とすると，G は単連結である．$s = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，標準的な表示で $(s/2, \ldots, s/2, \pm s/2)$ を最高ウェイトとする $K = \mathrm{Spin}(2r)$ の既約表現 $\pi_s^{\pm}$ は small であり，この他に small K-タイプはない．$\Sigma = \{\pm\alpha\}$ とする．$\pi = \pi_s^{\pm}$ に対しては，$\Sigma^\pi = \Sigma \cup 2\Sigma = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$, $\boldsymbol{k}_\alpha^\pi = -s$, $\boldsymbol{k}_{2\alpha}^\pi = r + s - \frac{1}{2}$ とすると (4.1) が成り立ち，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = (\cosh \frac{\alpha}{2})^s$ となる．$s = 1$ のときのこの結果は，[CP] により知られている．

4.5 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$ $(p > q \geq 3)$

G を $\mathrm{Spin}(p, q)$ $(p > q \geq 3)$ の 2 重被覆とすると，$K = \mathrm{Spin}(p) \times \mathrm{Spin}(q)$ であり，G は単連結である．pr_1, pr_2 をそれぞれ K から $\mathrm{Spin}(p)$, $\mathrm{Spin}(q)$ への射影とする．$||e_1|| = \cdots = ||e_q||$ であるような適当な $\mathfrak{a}^*$ 直交基底 $\{e_i \,|\, 1 \leq i \leq q\}$ により，$\Sigma = \{\pm e_i \,|\, 1 \leq i \leq q\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq q\}$ とできる．

(1) σ は，q が奇のときは $\mathrm{Spin}(q)$ のスピン表現，q が偶のときは 2 つある $\mathrm{Spin}(q)$ の半スピン表現のいずれかとする．このとき $\pi = \sigma \circ \mathrm{pr}_2$ は small で，$\Sigma^\pi = \{\pm 2e_i \,|\, 1 \leq i \leq q\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq q\}$, $\boldsymbol{k}_{\pm 2e_i}^\pi = \frac{p-q}{2}$, $\boldsymbol{k}_{\pm e_i \pm e_j}^\pi = \frac{1}{2}$ とすると (4.1) が成り立ち，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{1 \leq i < j \leq q} (\cosh \frac{e_i - e_j}{2} \cosh \frac{e_i + e_j}{2})^{-\frac{1}{2}}$ となる．

(2) p が偶で q が奇のときは，σ を $\mathrm{Spin}(p)$ のいずれかの半スピン表現とすると，$\pi = \sigma \circ \mathrm{pr}_1$ も small である．このとき，$\Sigma^\pi = \{\pm e_i, \pm 2e_i \,|\, 1 \leq i \leq q\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq q\}$, $\boldsymbol{k}_{\pm e_i}^\pi = p - q$, $\boldsymbol{k}_{\pm 2e_i}^\pi = -\frac{p-q}{2}$, $\boldsymbol{k}_{\pm e_i \pm e_j}^\pi = \frac{1}{2}$ とすると (4.1) が成り立ち，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^q (\cosh \frac{e_i}{2})^{-p+q} \prod_{1 \leq i < j \leq q} (\cosh \frac{e_i - e_j}{2} \cosh \frac{e_i + e_j}{2})^{-\frac{1}{2}}$ となる．

これら以外に非自明な small K-タイプはない．

4.6 Hermite 型

G が有限な中心を持つ非コンパクトな Hermite 型実単純 Lie 群であるときは，K-タイプ (π, V) が small であることと $\dim V = 1$ であることが同値になる．従って $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{k}$ の中心とすると，G の small K-タイプの全体が $\sqrt{-1}\mathfrak{z}^*$ 内のランク 1 の格子と自然に同一視される．G_{alg} を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を Lie 環とする単連結複素 Lie 群における $\mathfrak{g}$ の解析的部分群とし，$\pi_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{z}^*$ を $G = G_{\mathrm{alg}}$ の場合の small K-タイプの格子の生成元とする．すると，任意の small K-タ

イプ π は適当な有理数 $\nu \in \mathbb{Q}$ により $\nu\pi_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{z}^*$ と同一視される．

$$\Sigma_{\mathrm{long}} = \{\alpha \in \Sigma \mid 最長の長さのルート\}, \qquad \Sigma_{\mathrm{middle}} = \Sigma \setminus (\tfrac{1}{2}\Sigma_{\mathrm{long}} \cup \Sigma_{\mathrm{long}})$$

とする．上の π に対して，$\Sigma^\pi = \Sigma_{\mathrm{long}} \cup 2\Sigma_{\mathrm{middle}} \cup 2\Sigma_{\mathrm{long}}$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}^\pi_\alpha = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}_{\frac{\alpha}{2}} \pm \nu, \quad \boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = \frac{1}{2} \mp \nu & (\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}}のとき), \\ \boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}_\alpha & (\alpha \in \Sigma_{\mathrm{middle}}のとき) \end{cases}$$

とすると (4.1) が成り立ち，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}} \cap \Sigma^+} (\cosh\frac{\alpha}{2})^{\mp\nu}$ となる．この結果は，[Hec, Chapter 5] や [S1] により既に知られている．

4.7 Σ が F_4 型の場合

G を Σ が F_4 型であるような非コンパクト型単連結実単純 Lie 群とする．複素 Lie 群の場合は §4.2 で扱ったので除外すると，以下の 4 つの場合がある．

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{f}_{4(4)}$ (F I)	$\mathfrak{e}_{6(2)}$ (E II)	$\mathfrak{e}_{7(-5)}$ (E VI)	$\mathfrak{e}_{8(-24)}$ (E IX)
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$

どの場合も K はあるコンパクト単純 Lie 群 K_1 と $K_2 := \mathrm{SU}(2)$ の直積である．pr_2 を射影 $K \to \mathrm{SU}(2)$ とし，$(\sigma, \mathbb{C}^2)$ を $\mathrm{SU}(2)$ の既約 2 次元表現とすると，$\pi := \sigma \circ \mathrm{pr}_2$ が唯一の非自明な small K-タイプである．Σ を制限ルートの長さに応じて $\Sigma_{\mathrm{short}} \sqcup \Sigma_{\mathrm{long}}$ のように分割する．すると，$\alpha \in \Sigma_{\mathrm{short}}$ に対して $\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha = 0$, $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}}$ に対して $\boldsymbol{m}_\alpha = 1$, $\boldsymbol{\kappa}^\pi_\alpha = -\frac{1}{4}$ となるので，$\Sigma^\pi = 2\Sigma_{\mathrm{short}} \cup \Sigma_{\mathrm{long}}$, $\boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha} = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}_\alpha$ $(\alpha \in \Sigma_{\mathrm{short}})$, $\boldsymbol{k}^\pi_\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}})$ とすると命題 3.3 の条件が満たされ，(4.1) が成り立つ．このとき，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}} \cap \Sigma^+} (\cosh\frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{2}}$ である．

4.8 simply-laced な Σ を持つスプリット単純 Lie 群

G をスプリット実単純 Lie 群とし，Σ が A, D, E 型のいずれかであるとする．A_1 型は §4.6 で扱ったので除外し，G は単連結とする．(例えば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ であれば，G は $\mathrm{SL}(p, \mathbb{R})$ の 2 重被覆で，$K = \mathrm{Spin}(p)$.)

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ $(p \geq 3)$	$\mathfrak{so}(p, p)$ $(p \geq 3)$	$\mathfrak{e}_{6(6)}$ (E I)	$\mathfrak{e}_{7(7)}$ (E V)	$\mathfrak{e}_{8(8)}$ (E VIII)
type	A_{p-1}	D_p	E_6	E_7	E_8
K	$\mathrm{Spin}(p)$	$\mathrm{Spin}(p) \times \mathrm{Spin}(p)$	$\mathrm{Sp}(4)$	$\mathrm{SU}(8)$	$\mathrm{Spin}(16)$

$(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(3, 3))$

定理 4.2（[L, Theorem 1]）　σ は $\mathrm{Spin}(p)$ $(p \geq 3)$ の既約表現で，p が奇のときはスピン表現，p が偶のときは 2 つある半スピン表現のいずれかとする．すると，σ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ の場合の small K-タイプである．また，$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, p)$ のとき，pr を K から 2 つの $\mathrm{Spin}(p)$ のいずれかへの射影とすると，$\sigma \circ \mathrm{pr}$ も small K-タイプである．$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(6)}$ のとき，$\mathrm{Sp}(4)$ の 8 次元のベクトル表現は small K-タイプである．$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(7)}$ のとき，$\mathrm{SU}(8)$ の 8 次元のベクトル表現とその反傾表現は small K-タイプである．$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(8)}$ のとき，$\mathrm{SO}(16)$ の 16 次元のベクトル表現を $\mathrm{Spin}(16)$ に引き戻したものは small K-タイプである．これら以外に非自明な small K-タイプはない．

π を定理で挙げたいずれかの small K-タイプとする．[L, Lemma 4.2] より $\boldsymbol{\kappa}^\pi \equiv -\frac{1}{4}$ であり，スプリット群であるから $\boldsymbol{m} \equiv 1$ である．従って，$\Sigma^\pi = \Sigma$, $\boldsymbol{k}^\pi \equiv \frac{1}{2}$ とすると命題 3.3 の条件が満たされ，(4.1) が成り立つ．このとき，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} (\cosh \frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{2}}$ となる．

4.9　G_2 型のスプリット単純 Lie 群

G は G_2 型の単連結スプリット実単純 Lie 群 $\tilde{G}_2$ だとする．このとき，K はどちらも $\mathrm{SU}(2)$ と同型な 2 つの単純群の直積に分解する：$K = K_1 \times K_2 \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$．$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環とし，$(\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ に対するルート系 $\Delta_\mathfrak{k}$ を $\{\pm\alpha_1\} \sqcup \{\pm\alpha_2\}$ とする．ここで，$\{\pm\alpha_i\}$ は $((\mathfrak{k}_i)_\mathbb{C}, (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_i)_\mathbb{C})$ のルート系であるとし $(i = 1, 2)$，$B(\cdot, \cdot)$ から誘導されるノルムに関して $||\alpha_1|| < ||\alpha_2||$ であるとする．pr_i を K から K_i への射影とする $(i = 1, 2)$．

定理 4.3（[L, Theorem 1]）　σ を $\mathrm{SU}(2)$ の 2 次元既約表現とすると，$G = \tilde{G}_2$ の非自明な small K-タイプは $\pi_1 := \sigma \circ \mathrm{pr}_1$ と $\pi_2 := \sigma \circ \mathrm{pr}_2$ の 2 つのみである．

Σ を制限ルートの長さに応じて $\Sigma_{\mathrm{short}} \sqcup \Sigma_{\mathrm{long}}$ のように分割すると，[L, Lemmas 4.2, 4.3] より $\boldsymbol{\kappa}^{\pi_1}$ と $\boldsymbol{\kappa}^{\pi_2}$ の値は以下になる：

π	π_1	π_2
$\boldsymbol{\kappa}^\pi_{\mathrm{short}}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{4}$
$\boldsymbol{\kappa}^\pi_{\mathrm{long}}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

従って，$\pi = \pi_1$ のときは §4.8 の場合と全く同様に Σ^π と $\boldsymbol{k}^\pi$ を選べばよい．

$\pi = \pi_2$ とする．この場合どのような $\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi$ に対しても (4.1) は成立しない．これを示すために (4.1) が成り立つような $\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi$ があると仮定する．すると，$\tilde{\delta}_{G/K}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}}$ は原点で非特異であるから，各 $\alpha \in \Sigma$ に対してそれに比例する $\beta \in \Sigma^\pi$ が必ず存在する．従って，Σ^π も G_2 型である．また，$\tilde{\delta}_{G/K}^{\frac{1}{2}} \Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda) = \tilde{\delta}(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}} F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda) \in \mathscr{A}(\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$ は，

(3.2) および $(\Sigma', \boldsymbol{k}) = (\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)$ とした (2.3) の固有関数なので，適当な定数 C により

$$(4.2)\qquad \sum_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{short}}\cap\Sigma^+} \frac{||\alpha||^2}{16}\left(\frac{4}{\sinh^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{32}{\sinh^2\alpha}\right) + \sum_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{long}}\cap\Sigma^+} \frac{||\alpha||^2}{16\sinh^2\frac{\alpha}{2}} = \sum_{\alpha\in\Sigma^{\pi+}} \frac{\boldsymbol{k}^\pi_\alpha(1-\boldsymbol{k}^\pi_\alpha - 2\boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha})||\alpha||^2}{4\sinh^2\frac{\alpha}{2}} + C$$

となる．ところが，$\{\sinh^{-2}\frac{\alpha}{2} \,|\, \alpha \in \Sigma\cup 2\Sigma_{\mathrm{short}} \cup \Sigma^\pi\}\cup\{1\}$ の要素は 1 次独立なので，各 $\alpha\in\Sigma\cup 2\Sigma_{\mathrm{short}}$ に対して $\boldsymbol{k}^\pi_\alpha(1-\boldsymbol{k}^\pi_\alpha-2\boldsymbol{k}^\pi_{2\alpha})\neq 0$ である．従って $\Sigma^\pi \supset \Sigma\cup 2\Sigma_{\mathrm{short}}$ となり，矛盾が起こる．

5 c-関数と球変換

この節では，実単純 Lie 群 G と (π, V), Σ^π, $\boldsymbol{k}^\pi$ に関して (4.1) が成り立っているとし，Heckman-Opdam 超幾何関数の理論を π-球関数に応用する．

(2.2) と (3.1) で定義した $\tilde\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)$ や $\tilde\delta_{G/K}$ の**重み関数**は，$\tilde\delta_{G/K}^{-\frac12}\,\tilde\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac12}$ が原点で 1 になるように規格化されているが，通常は

$$\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi) = \prod_{\alpha\in\Sigma^{\pi+}} \left|2\sinh\frac{\alpha}{2}\right|^{2\boldsymbol{k}^\pi_\alpha}, \qquad \delta_{G/K} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |2\sinh\alpha|^{\boldsymbol{m}_\alpha}$$

が用いられる．§4 で具体的に挙げた $\boldsymbol{k}^\pi$ と Σ^π は，すべて

$$(5.1)\qquad \Sigma^\pi \subset \Sigma\cup 2\Sigma$$

の条件を満たしているが，この条件のもと

$$e(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi) = \sum_{\alpha\in\Sigma^+\setminus 2\Sigma^+} \left(\boldsymbol{k}^\pi_\alpha - \boldsymbol{k}^\pi_{4\alpha} + \frac{\boldsymbol{m}_{2\alpha}}{2}\right)$$

と置くと，

$$(5.2)\qquad \tilde\delta_{G/K}^{-\frac12}\,\tilde\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac12} = 2^{e(\Sigma^\pi,\boldsymbol{k}^\pi)}\,\delta_{G/K}^{-\frac12}\,\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac12}$$

が成り立つ．以降では (5.1) を仮定する．

$\bar N := \theta N$ 上の Haar 測度 $d\bar n$ を

$$\int_{\bar N} e^{-2\rho(H(\bar n))} d\bar n = 1$$

となるように規格化し，$\mathfrak{a}^*_+ = \{\lambda\in\mathfrak{a}^* \,|\, \lambda(\alpha^\vee) > 0\ (\forall\alpha\in\Sigma^+)\}$ と置く．$\lambda\in\mathfrak{a}^*_+ + \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に対して積分

$$(5.3)\qquad c^\pi(\lambda) = \int_{\bar N} e^{-(\lambda+\rho)(H(\bar n))}\pi(\kappa(\bar n))d\bar n$$

は絶対収束し，$\mathrm{End}_M V$-値の正則関数を定める（Harish-Chandra **の c-関数**）．$c^\pi(\lambda)$ は，$\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ 全体の有理型関数に解析接続されることが知られている．また，積分公式 (1.3) から，任意の $H \in \mathfrak{a}_+$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_+^* + \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} e^{t(-\lambda+\rho)(H)} \phi_\lambda^\pi(e^{tH}) = c^\pi(\lambda) \tag{5.4}$$

が示される．[GK] は，(π, V) が自明な K-タイプのときに積分 (5.3) を計算して $c^\pi(\lambda)$ の明示公式を与えた．一方 [HO] は，その明示公式を拡張して $c(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda)$（Heckman-Opdam **超幾何関数の c-関数**）を (2.6) で定義した．

定理 5.1　$\mathrm{End}_M V \simeq \mathbb{C}$ により $c^\pi(\lambda)$ を複素数値関数と見做すと

$$c^\pi(\lambda) = 2^{e(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)} c(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda). \tag{5.5}$$

証明　(4.1) と (5.2) より

$$e^{-\lambda+\rho}\,\Upsilon^\pi(\phi_\lambda^\pi) = 2^{e(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)} \big(e^\rho\, \delta_{G/K}^{-\frac{1}{2}}\big)\big(e^{-\rho(\boldsymbol{k}^\pi)}\, \delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{\frac{1}{2}}\big) e^{-\lambda+\rho(\boldsymbol{k}^\pi)} F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda).$$

であるから，

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\rho(H)}\, \delta_{G/K}^{-\frac{1}{2}}(tH) = \lim_{t\to\infty} e^{-t\rho(\boldsymbol{k}^\pi)(H)}\, \delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi; tH)^{\frac{1}{2}} = 1$$

と (5.4) と命題 2.4 より (5.5) を得る．　□

コンパクトな台を持つ π-球関数全体を $C_c^\infty(G, \pi, \pi)$ と表す．$C_c^\infty(G, \pi, \pi)$ には合成積

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_G \phi_1(g^{-1}x)\phi_2(g)dg$$

が定義される（dg は G 上の適当な Haar 測度）．$\phi \in C_c^\infty(G, \pi, \pi)$ の **π-球変換**を

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_G \phi_\lambda^\pi(g^{-1})\phi(g)dg \tag{5.6}$$

で定義しよう．これは $\mathrm{End}_K V \simeq \mathbb{C}$ に値を取り，(1.3) より $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ 上正則になる．また，各 $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対して

$$C_c^\infty(G, \pi, \pi) \ni \phi \mapsto \hat{\phi}(\lambda) \in \mathbb{C}$$

は $\mathbb{C}$-代数の準同型になっている．さて，G 上のコンパクトな台を持つ両側 K-不変な連続関数 ψ に対して

$$\int_G \psi(g)dg = \frac{1}{\#W} \int_\mathfrak{a} \psi(e^H)\, \delta_{G/K}(H)dH$$

が成り立つように $\mathfrak{a}$ 上の Harr 測度 dH を規格化すると（[Hel, Ch. I, Theorem 5.8] 参照），(5.6) は

$$\hat{\phi}(\lambda) = \frac{1}{\#W} \int_\mathfrak{a} \Upsilon^\pi(\phi_{-\lambda}^\pi)(H)\, \Upsilon^\pi(\phi)(H)\, \delta_{G/K}(H)dH$$

のように書き直される．従って，定理 1.6 より π-球変換を積分変換

$$C_c^\infty(\mathfrak{a})^W \ni f \mapsto \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\# W}\int_{\mathfrak{a}} f(H)\, \Upsilon^\pi(\phi^\pi_{-\lambda})(H)\, \delta_{G/K}(H) dH \tag{5.7}$$

と同一視することができる．ここで，$C_c^\infty(\mathfrak{a})^W = \{f \in C^\infty(\mathfrak{a})^W \mid f$ の台はコンパクト $\}$ である．(π, V) が自明な K-タイプのときは，(5.7) は古典的な球変換（あるいは Harish-Chandra **変換**, [HC], [GV], [Hel], [War] 参照）である．[Op1] はこれを拡張して次の**超幾何** Fourier **変換**を定義した：

$$C_c^\infty(\mathfrak{a})^W \ni f \mapsto \mathcal{F}f(\lambda) := \frac{1}{\# W}\int_{\mathfrak{a}} f(H)\, F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, -\lambda; H)\, \delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi; H) dH. \tag{5.8}$$

($\dim \mathfrak{a} = 1$ のときの $\mathcal{F}$ は，Jacobi **変換** ([Ko] 参照) として [Op1] より前に与えられている．)

定理 5.2　任意の $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})^W$ に対して

$$\hat{f} = 2^{e(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)} \mathcal{F}\big(f\, \delta_{G/K}^{\frac{1}{2}}\, \delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi)^{-\frac{1}{2}}\big). \tag{5.9}$$

証明　(4.1), (5.2), (5.7), (5.8) による．□

$\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 上の Haar 測度 $d\lambda$ を，古典的な Fourier 変換とその逆変換が

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(H) e^{-\lambda(H)} dH,$$
$$f(H) = \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\lambda) e^{\lambda(H)} d\lambda$$

となるように規格化する．

定理 5.3 **([Op1])**　$\boldsymbol{k}^\pi_\alpha \geq 0$ $(\forall \alpha \in \Sigma^\pi)$ とする．任意の $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})^W$ に対して**逆変換公式**

$$f(H) = \frac{1}{\# W}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \mathcal{F}f(\lambda)\, F(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda; H)\, |c(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda)|^{-2} d\lambda \tag{5.10}$$

および Plancherel **の等式**

$$\frac{1}{\# W}\int_{\mathfrak{a}} |f(H)|^2 \delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi; H) dH = \frac{1}{\# W}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} |\mathcal{F}f(\lambda)|^2 |c(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda)|^{-2} d\lambda \tag{5.11}$$

が成り立つ．$\mathcal{F}$ は次の等長写像に一意的に拡張される：

$$L^2(\mathfrak{a}, \tfrac{1}{\# W}\delta(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi; H) dH)^W \xrightarrow{\sim} L^2(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*, \tfrac{1}{\# W}|c(\Sigma^\pi, \boldsymbol{k}^\pi, \lambda)|^{-2} d\lambda)^W.$$

この超幾何 Fourier 変換に関する結果は，(4.1), (5.2), (5.5), (5.9) により直ちに π-球変換に関する以下の結果に書き直される：

定理 5.4　$\boldsymbol{k}^\pi_\alpha \geq 0$ $(\forall\alpha \in \Sigma^\pi)$ とする．任意の $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{a})^W$ に対して逆変換公式

$$f(H) = \frac{1}{\#W}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f}(\lambda)\, \Upsilon^\pi(\phi^\pi_\lambda)(H)\, |c^\pi(\lambda)|^{-2} d\lambda \tag{5.12}$$

および Plancherel の等式

$$\frac{1}{\#W}\int_{\mathfrak{a}} |f(H)|^2\, \delta_{G/K}(H) dH = \frac{1}{\#W}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\lambda)|^2 |c^\pi(\lambda)|^{-2} d\lambda \tag{5.13}$$

が成り立つ．$f \mapsto \hat{f}$ は次の等長写像に一意的に拡張される：

$$L^2(\mathfrak{a}, \tfrac{1}{\#W}\delta_{G/K}(H)dH)^W \xrightarrow{\sim} L^2(\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*, \tfrac{1}{\#W}|c^\pi(\lambda)|^{-2}d\lambda)^W.$$

§4 では各 (π, V) に対して $\boldsymbol{k}^\pi$ と Σ^π を 1 組ないし 2 組具体的に与えたが，いずれも定理の仮定「$\boldsymbol{k}^\pi_\alpha \geq 0$ $(\forall\alpha \in \Sigma^\pi)$」を満たさないことがあるのは，次の場合に限られる：

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,1)$ $(p \geq 1)$ または $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r,1)$ $(r \geq 2)$,
(2) G が Hermite 型,
(3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ $(p > q \geq 3, p$ は偶, q は奇$)$ のときに §4.5 (2) で与えた (π, V).

$\dim\mathfrak{a} = 1$ の場合には定理 5.3 より弱い仮定「$\boldsymbol{k}^\pi$ は実数値，$\boldsymbol{k}^\pi_{\mathrm{short}} + \boldsymbol{k}^\pi_{\mathrm{long}} > -\frac{1}{2}$」のもとで Jacobi 変換 $\mathcal{F}$ の逆変換公式や Plancherel の等式が証明されている ([Ko], [FJ, Appendix 1])．これより (1) および (2) で $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,1)$ の場合の π-球変換に関する結果が得られる ((1) で $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,1)$ の場合は [S2, DP]，(1) で $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2r,1)$, $s = 1$ の場合は [CP]，(2) で $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,1)$ の場合は [FJ])．但し，$c^\pi(\lambda)$ が $\mathfrak{a}^*_+ + \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に零点を持つ場合には，定理 5.4 と同じ連続スペクトルに加えて離散スペクトルが現れる（離散系列表現に対応）．

(2) の場合，§4.6 の記号のもとで，$\alpha \in \Sigma_{\mathrm{long}}$ に対して $2|\nu| \leq \max\{\boldsymbol{m}_{\frac{1}{2}\alpha}, 1\}$ のときは定理 5.3 が適用できて，定理 5.4 が成り立つ．[S1] では，$2|\nu| > \max\{\boldsymbol{m}_{\frac{1}{2}\alpha}, 1\}$ のときも含む一般の場合に定理 5.4 に相当するものが得られている．この場合 $c^\pi(\lambda)$ が $\mathfrak{a}^*_+ + \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に零点を持ち，定理 5.4 と同じ最も連続なスペクトルに加えて低次元の台を持つスペクトルが現れる（$|\nu|$ が十分大きければ離散スペクトルも現れる）．

(3) の場合は $c^\pi(\lambda)$ が $\overline{\mathfrak{a}^*_+} + \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に零点を持たないので，古典的な球変換に対する議論 ([R, Hel]) と同様の方法により定理 5.4 と同じ結論が示されると予想している．

(1), (2), (3) はすべて Σ^π が BC 型である．BC_1 型の場合は Jacobi 変換の理論でカバーされるが，一般の階数の BC 型の場合にも，定理 5.3 の仮定を $\boldsymbol{k}^\pi_\alpha \geq 0$ $(\forall\alpha \in \Sigma^\pi)$ より弱めて (1), (2), (3) の場合をすべてカバーするような超幾何 Fourier 変換の逆変換公式と Plancherel の等式を確立することは今後の課題である．

参考文献

[C] R. Camporesi, *The spherical transform for homogeneous vector bundles over Riemannian symmetric spaces*, J. of Lie theory, **7** (1997), 29–60.

[CP] R. Camporesi and E. Pedon, *Harmonic analysis for spinors on real hyperbolic spaces*, Colloq. Math. **87** (2001), 245–287.

[De] A. Deitmar, *Invariant operators on higher K-types*, J. reine angew. Math. **412** (1990), 97–107.

[DP] G. van Dijk and A. Pasquale, *Harmonic analysis on vector bundles over* $\mathrm{Sp}(1,n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, Enseign. Math. **45** (1999), 219–252.

[FJ] M. Flensted-Jensen, *Spherical functions on a simply connected Lie group. II. The Paley-Wiener theorem for the rank one case*, Math. Ann. **228** (1977), 65–92.

[GV] R. Gangolli and V. S. Varadarajan, *Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups*, Springer-Verlag, 1988.

[GK] S. I. Gindikin and F. I. Karpelevich, *Plancherel measure for symmetric Riemannian spaces of non-positive curvature*, Soviet Math. Dokl., **3** (1962), 962–965.

[Go] R. Godement, *A theory of spherical functions. I*, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), 496–556.

[HC] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group. I*, Amer. J. Math. **80** (1958), 241–310.

[Hec] G. J. Heckman, *Hypergeometric and Spherical Functions*, In: *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces*, Perspect. Math., Academic Press, Boston, MA, 1994.

[HO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.

[Hel] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Amer. Math. Soc., 2000, c1984.

[Ko] T. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups.* In: *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications*, 1–85, Math. Appl., Reidel, Dordrecht, 1984.

[L] S. W. Lee, *Representations with small K types*, arXiv:1209.5653 [v3] (2013).

[Op1] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175** (1995), no. 1, 75–121.

[Op2] E. M. Opdam, *Lecture notes on Dunkl operators for real and complex reflection groups*, MSJ Memoirs **8**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000.

[OS] H. Oda and N. Shimeno, *Spherical functions for small K-types*, arXiv:1710.02975 (2017).

[R] J. Rosenberg, *A quick proof of Harish-Chandra's Plancherel theorem for spherical functions on a semisimple Lie group*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), no. 1, 143–149.

[S1] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on simply connected simple Lie group of Hermitian type*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 330–388.

[S2] N. Shimeno, *Harmonic analysis on homogeneous vector bundles on hyperbolic spaces*, Springer, 1988. Tokyo J. of Math. **18** (1995), 383–400.

[T] R. Takahashi, *Fonctions sphériques dans les group* $\mathrm{Sp}(n, 1)$, In: J. Faraut, (ed.), *Théorie dupoentielet analyse harmonique*, Lecture Notes in Math. **404** (1974), 218–228.

[Wal] N. Wallach, *Real Reductive Groups II*, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1992.

[War] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II*, Springer-Verlag, Berlin/Heiderberg/New York, 1972.